MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA – MEC
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ – UFPI
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO – PRPPG
Coordenadoria Geral de Pesquisa – CGP
Programa de Bolsa de Iniciação Científica - PIBIC
Campus Universitário Ministro Petrônio Portela, Bloco 06 – Bairro Ininga
Cep: 64049-550 – Teresina-PI – Brasil – Fone (86) 215-5564 – Fone/Fax (86) 215-5560
E-mail: pesquisa@ufpi.br; pesquisa@ufpi.edu.br

HISTÓRIA, REALIZAÇÕES MATEMÁTICAS E PERSPECTIVAS

Bernardo Cardoso de Araújo (bolsista PIBIC/UFPI), Alexandro Oliveira Marinho (Orientador, Departamento de Ciências Econômicas e Quantitativas - UFPI)

1. Introdução: Apresentaremos aqui um breve resumo do projeto de Iniciação Científica: Modelagem, Controle e Discretizações para Sistemas Distribuídos, sobre o título: História, Realizações Matemáticas e Perspectivas. Projeto este desenvolvido durante o período de 01 de agosto de 2009 a 31 de julho de 2010, sendo este muito relevante, pois faz estudo em algumas das mais importantes subáreas da matemática pura e aplicada, que é o estudo de equações diferenciais, modelagem, controle e outras.

2. Metodologia: Basicamente, o projeto se desenvolveu sobre a forma de exposições orais para o orientador, leitura de livros e artigos indicados pelo orientador e consultas ao orientador para diminuir as dúvidas, com pelo menos um encontro semanal e horário pré-estabelecidos conforme a conveniência do orientando e do orientador.

3. Resultados e discussão: Desenvolve-se inicialmente um grande estudo das equações diferenciais, de primeira e segunda ordem, o estudo de conceitos, classificações e métodos de soluções para alguns tipos de equações diferenciais de primeira e segunda ordem, construindo assim o pilar para prosseguir o desenvolvimento do projeto.

3.1 Equações diferenciais

3.1.1 Classificação: Classificam-se as equações diferenciais por tipo (ordinária ou parcial), pela ordem (a maior ordem de derivada que a equação apresenta), linearidade (linear ou não-linear).

3.1.2 Métodos de solução: Para equações de primeira ordem estudaram-se os métodos das equações de variáveis separáveis, equações lineares e equações exatas com o método do fator integrante. Para equações diferenciais estudaram-se os métodos de redução de ordem, solução de equações lineares homogêneas com coeficientes constantes, método dos coeficientes a determinar (anulador e superposição) para equações lineares com coeficientes constantes não homogênea e a variação de parâmetro.

Esse estudo em equações diferenciais é importante para prosseguirmos o desenvolvimento do projeto, pois, o estudo de teoria do controle requer a compreensão destas assim como suas soluções para podermos construir modelos matemáticos consistentes. Estudaram-se em teoria do controle suas origens, idéias básicas, história, aplicações contemporâneas e perspectivas.

Com o estudo em teoria do controle, surge um dos mais clássicos problemas de controle que é o controle do pêndulo, esta é uma atividade de nível bem compreensível, porém de grande aplicabilidade na robótica, pois na robótica pode-se sempre que temos um braço robótico vê-lo como um pêndulo simples e controlarmos com os modelos de controle desenvolvido durante este projeto.

3.2 O Pêndulo

3.2.1 Controle Proporcional Derivativo: A partir da equação do pêndulo ($mL\theta''(t) + mg\ sen\theta = 0$) modelada a partir da segunda lei de Newton, construímos de forma contínua um controle que agindo sobre o sistema com equação de estado $mL\theta''(t) + mg\ sen\theta = v(t)$ (onde consideramos para simplificar os cálculos que $m = L = g = 1$ e linearizamos substituido $sen\theta$ por θ), que leva o sistema do estado (θ', θ) para o estado $(0, \pi)$, que é para uma nova configuração onde $\varphi = \theta - \pi$ estaremos levando o sistema de um estado (φ', φ) para a condição $(0{,}0)$, que é a origem do plano, obtendo-se assim a controlabilidade total por ser controlável na origem. Obtemos que o melhor controle será $v(t) = -\alpha\theta(t) - \beta\theta(t)$ onde $\alpha > 1$ e $\beta > 0$, onde α e β satizfazem $\beta^2 > 4(\alpha - 1)$. Pois com esse controle as soluções da equação diferencial de estado convergem monotonicamente para nossa solução de equilíbrio.

3.2.2 Controle Digital: Os inconvenientes do controle do pêndulo dessa forma contínua é que as soluções apenas convergem para a solução de equilíbrio e por ser de difícil implementação já que as máquinas ainda não conseguem trabalhar com modelos contínuos, trabalham apenas com modelos discretos. Surge então uma sugestão de controle discreto, onde avaliaríamos φ apenas em um conjunto discreto de tempo

$$0, \qquad \delta, \qquad 2\delta, \qquad \ldots, \qquad k\delta, \qquad \ldots$$

e modificar o controle em cada valor de t e mantê-lo constante durante todo o intervalo $[k\delta, (k+1)\delta]$. Que resolvendo então a equação de estado $\varphi''(t) - \varphi(t) = v_k$, onde v_k é o controle constante aplicado durante o intervalo $[k\delta, (k+1)\delta]$. Onde considerarmos

$$x_k := \begin{pmatrix} \varphi(kt) \\ \varphi'(kt) \end{pmatrix}$$

onde obtemos pela solução da equação de estado que

$$x_{k+1} = Ax_k + Bv_k$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} cosh\delta & senh\delta \\ senh\delta & cosh\delta \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} cosh\delta - 1 \\ senh\delta \end{pmatrix}$$

considerando F tal que $v_k = Fx_k$ temos $x_{k+1} = Ax_k + BFx_k = (A + BF)x_k$. Que para esse modelo quando $(A + BF)^2 = 0$ então obtemos o nosso objetivo em duas etapas. Mas a nossa principal vantagem é a facilidade de implementação e o fato da convergência ocorrer em um tempo finito.

4. Conclusão: Podemos então observar a relevância do trabalho, pois mesmo sem termos de fato implementados esses modelos a sua construção matemática garante sua consistência e ainda pode-se observar que todos os tópicos desenvolvidos complementam-se e constroem-se, fazendo assim com que o trabalho tenha grande contribuição de incentivo à atividade científica.

Palavras-chave: Equações Diferenciais. Modelagem. Controle.

REFERÊNCIAS

[1] Boyce, W.E.-Di Prima, Richard. C., Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, 5ª Ed. LTC- Rio de Janeiro, 1994.

[2] Sontag, E. D. Mathematical Control Theory.Deterministic Finite Dimensional Systems 2a ed. Texts in Applied Mathematics, 6 Springer-Velarg, New York 1998.

[3] E. Fernández-Cara-E. Zuazua, Teoria do Controle: História, Realizações Matemáticas e perspectivas. (Tradução: Alexandro O. Marinho)

[4] Guidorizzi, H.L. Um curso de Cálculo, volume 4. 5. ed. Rio de Janeiro-RJ: LTC, 2002

[5] Zill, D.G. Equações diferenciais com aplicações em modelagem. São Paulo: Pioneira Thomson learning, 2003.